

## I. HAI PHƯƠNG PHÁP MÔ TẢ CHUYỂN ĐỘNG CẤU UCH T

### 1. H T CHỈ TIỂU

Trong cơ học chỉ tiêu khái niệm chuyển động dùng, để tên gọi khác là *h t chỉ tiêu*. Công nghệ chuyển động hay tính toán, h t chỉ tiêu phải có kích thước r t nh so với các khoảng cách để tính toán, xét, nh ng không nh n m c nguyên tố, phân tử. M i h t chỉ tiêu phải chứa m t s l n các nguyên tố, phân tử v t ch t, cho chỉ tiêu v n có thể coi nh m t môi trường liên tục.

Ch ng h n, khi xét dòng nh c ch y trong m t ng nh c thì kích thước c a h t chỉ tiêu phải nh h n nh i u so với ng kính c a ng nh c, nh ng l i l n h n nh i u so với khoảng cách trung bình giữa các phân tử nh c. Nh ng kính ng nh c là c 0,1m, và b i t r ng khoảng cách trung bình giữa các phân tử nh c là  $10^{-10}$  m, ng i ta có thể ch n h t chỉ tiêu có kích thước khoảng  $10^{-6}$  m. M t h t nh c nh th v n còn ch a n  $10^{10}$  phân tử nh c.

mô tả chuyển động c a các h t chỉ tiêu trong m t dòng ch y, ng i ta có thể ch n kh o sát qu o c a t ng h t chỉ tiêu m t (ph ng pháp Lagrange) hay dùng khái niệm trường v n t c (ph ng pháp Euler).

### 2. PHƯƠNG PHÁP LAGRANGE

Nh ã nói trên, cách mô tả Lagrange đòi hỏi phải b i t qu o c a các h t chỉ tiêu, ó c ng chính là cách mô tả quen thuộc trong cơ học, dựa vào các vect v trí  $\vec{r}(t)$ , v n t c  $\vec{v}(\vec{r}(t), t)$  và gia tốc  $\vec{a}(\vec{r}(t), t)$  c a t ng h t.

Nói m t cách hình tượng, thì ph ng pháp Lagrange t ng ng v i vi c ánh d u các h t chỉ tiêu trong m t dòng ch y, b ng cách nhuộm màu chúng ch ng h n, r i ch p nh dòng ch y v i th i gian m ng kính th t dài có thể th y c ng i c a các h t ánh d u. Hình 2.1 cho th y m t nh ch p nh th c a m t dòng ch y quanh m t ng tr .

### 3. PHƯƠNG PHÁP EULER

### 3.1 TR NG V N T C

22

Hình 3.2 cho ta thấy một ví dụ về chuyển động; đó là một quỹ đạo phức tạp trên máy tính cho chuyển động của một vật.

### 3.3 GIA TỐC VÀ TĂNG TỐC

Theo cách mô tả Euler, mà chúng ta không dùng biểu thức tăng tốc để minh họa chuyển động, ngay cả khi có thể xác định gia tốc từ chuyển động.

Thật vậy, xét một hạt chuyển động với vận tốc  $\vec{v}$  vào thời điểm  $t$ , tại lúc  $t+dt$  thì hạt di chuyển tới vị trí  $\vec{r}+d\vec{r}$ . Vận tốc của hạt lúc  $t$  và  $t+dt$  là  $\vec{v}(\vec{r},t)$  và  $\vec{v}(\vec{r}+d\vec{r},t+dt)$ .

Biến thiên vận tốc của hạt là:

$$d\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}+d\vec{r},t+dt) - \vec{v}(\vec{r},t) = dt \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad (3.1)$$

Chia biểu thức trên cho  $dt$  ta thu được gia tốc của hạt chuyển động:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad (3.2)$$

Về mặt hình thức, biểu thức trên có vẻ giống như đạo hàm toàn phần của vận tốc theo thời gian, nếu coi vận tốc là hàm của thời gian. Nhưng sự thật là chúng ta đã không lấy đạo hàm toàn phần của vận tốc, vì vận tốc này không phụ thuộc vào thời gian.

Chẳng rõ ràng gì không phải là đạo hàm toàn phần theo thời gian, mà sự tác động đã dùng khái niệm *đạo hàm theo thời gian*, như sau:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \quad (3.3)$$

Nếu vậy theo cách mô tả Euler thì gia tốc của hạt chuyển động mà vận tốc nào đó là đạo hàm theo thời gian của vận tốc tại vị trí đó:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (3.4)$$

Có tên gọi *đạo hàm theo thời gian* là vì, như trình bày trên đây, chúng ta đã đi theo hạt chuyển động trong quá trình tính toán biến thiên của vận tốc. Trong cách mô tả Euler, nếu muốn tính các biến thiên của một đại lượng nào đó dọc theo quỹ đạo của hạt, thì nhất thiết phải dùng *đạo hàm theo thời gian*.

## II. MÔ TẢ KHÁI NIỆM VỀ ĐỘNG LỰC HỌC

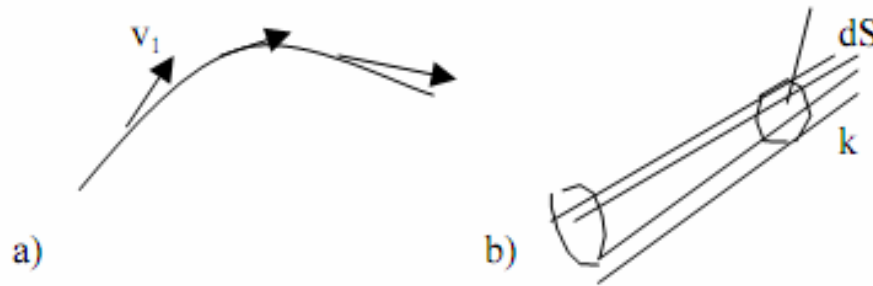
Trong nghiên cứu chuyển động của các vật thể, người ta thường quan tâm đến dòng nguyên tử, sau đó áp dụng cho toàn dòng chảy. Mô tả khái niệm về dòng chảy như sau:

### 1. Dòng chảy

ng dòng là ng cong mà ti p tuy n c a nó t i m i i m trên ng này trùng v i vect v n t c chuy n ng c a ch t l ng, ngh a là vect qu ng ng trùng v i vect v n t c.

## 2. Dòng nguyên t

T p h p các ng dòng t a trên m t vòng kín vô cùng nh t o nên m t ng dòng. Dòng ch t l ng ch y trong ng dòng g i là dòng nguyên t .



Hình 3.3

Ý ngh a v t lý c a dòng nguyên t : Bi u di n ph ng chuy n ng c a ch t l ng t i m t th i i m và th hi n s phân b các vect v n t c trong m t kho nh kh c.

Các tính ch t c a dòng nguyên t là:

- Dòng nguyên t c a chuy n ng không đ ng thay i hình d ng theo th i gian.
- Ch t l ng chuy n ng đ c theo dòng nguyên t mà không chuy n ng xiên
- Trên ti t di n ngang c a dòng nguyên t thì s phân b các y u t th y ng gi ng nhau
- Trong chuy n ng đ ng thì qu o và ng dòng trùng nhau  
ng dòng trong qu o ph ng c bi u di n b i hàm dòng  $(x,y)$ .

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.5)$$

Hay

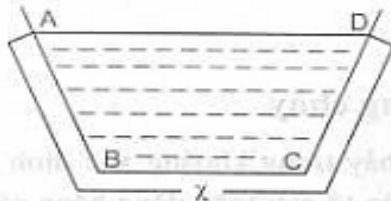
$$\frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{dy}{-\frac{\partial \psi}{\partial x}} \quad \text{hay} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad ; \quad d\psi = 0 \quad (3.6)$$

## 3. Các y u t th y l c c a dòng ch y

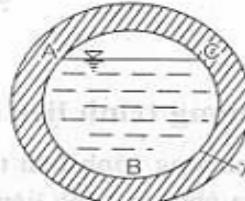
M t c t t A: là m t c t vuông góc v i vect c a dòng ch y.

Chu vi  $t$  : Là phần chu vi của mặt  $t$  tiếp xúc với thành rãnh hình tròn chày.

Bán kính thủy lực  $R$ : là tỉ số giữa diện tích  $t$  và chu vi  $u$  của  $t$ .  $R = A/u$



Hình 3-5



Hình 3-6

Lưu ý: bán kính thủy lực không phải là bán kính trong của ống tròn.

### III. Phân loại chuyển động.

Trong thực tế, chúng ta có thể phân loại chuyển động của chất lưu theo nhiều cách khác nhau, thông thường thì phân chia theo tính chất chuyển động của chất lưu.

Theo tính chất chuyển động thì phân thành hai loại: chuyển động không đồng và chuyển động đồng.

Nếu các đại lượng đặc trưng cho chuyển động của chất lưu phụ thuộc vào không gian và thời gian thì chuyển động đó gọi là chuyển động không đồng.

$$v = v(x, y, z, t); p = p(x, y, z, t); \rho = \rho(x, y, z, t), \dots \quad (3.7)$$

Nếu các đại lượng đặc trưng cho chuyển động của chất lưu không phụ thuộc vào thời gian thì chuyển động đó gọi là chuyển động đồng.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \dots \quad (3.8)$$

Trong kỹ thuật thường gặp các chuyển động không đồng, nhưng nếu xét về thời gian thì các yếu tố chuyển động không thay đổi đáng kể thì có thể coi dòng chuyển động đó là chuyển động đồng trung bình theo thời gian và các yếu tố chuyển động trung bình theo thời gian xét như trong chuyển động đồng.

Nếu phần tử chất lưu chuyển động và quay quanh trục cố định thì qua chính nó thì chuyển động đó gọi là chuyển động xoáy. Chuyển động này có mô tả bằng phương trình.

$$\vec{rotv} = 2\vec{\omega} \quad (3.9)$$

Trong đó:

v: là v n t c chuy n ng c a phân t ch t l ng

w: là v n t c chuy n ng quay c a phân t ch t l ng

N u các phân t chuy n ng mà không quay quanh tr c c a nó là g i là chuy n ng không xoáy. Ph ng trình chuy n ng không xoáy:

$$\vec{rotv} = 0 \quad (3.10)$$

#### IV. PH NG TRÌNH LIÊN T C C A L U CH T

##### 1. Khái ni m

Trong th c t , ta th ng g p các lo i chuy n ng nh chuy n ng c a n c, d u...trong ng, kênh, các máy th y l c...t c là l u ch t chuy n ng bên trong biên r n; ho c chuy n ng c a không khí bao quanh nh à c a, xe h i, máy bay hay n c bao quanh tàu thuy n,... t c là l u ch t chuy n ng bên ngoài v t r n. trong c hai tr ng h p l u ch t c xem là m t môi tr ng liên t c, ph n t l u ch t v m t v t lí c xem là kh i l ng vô cùng nh , v m t toán h c v trí c a t ng ph n t l u ch t là l i m trong l u ch t y.

Nh v y, khi vi c tìm hi u ng h c l u ch t là nghiên c u chuy n ng c a các ph n t mà không xét n nguyên nhân gây ra chuy n ng (các l c tác ng). Các thông s c n quan tâm ây g m: v n t c, gia t c c a các ph n t l u ch t và s bi n thiên c a các i l ng này theo th i gian.

Ngoài ra d a vào k t qu gi i các ph ng trình vi phân c a chuy n ng, ph ng trình liên t c,... mà chúng ta có th nghiên c u các c tr ng, quy lu t chuy n ng c a dòng ch y t do trong m t không gian vô biên, trong môi tr ng ch t l ng, ch t khí và các l c t ng tác gi a chúng hay các ngành khoa h c k khác nh : thu l c h c, khí ng h c, ng l c hàng không, lí thuy t l p biên, lí thuy t lu ng, lí thuy t cánh, lí thuy t dòng xoáy,...

##### 2. Ph ng trình liên t c ( nh lu t b o toàn dòng):

###### 2.1 Ch t l ng lý t ng:

Ch t l ng lý t ng là ch t l ng mà ta có th b qua l c ma sát nh t c a các ph n bên trong ch t l ng khi chuy n ng t ng i v i nhau. Đ i v i ch t l ng lý t ng, ta s bi u di n ng i c a m t phân t ch t l u b ng m t ng dòng mà ti p tuy n v i nó t i m i i m có ph ng chi u trùng v i véc t v n t c c a ch t l u t i i m ó. T p h p toàn b các ng dòng bi u di n cho c kh i ch t l u c g i là ng dòng.

Nếu chúng ta cắt ngang dòng bằng mặt phẳng vuông góc với trục của dòng, thì tích phân của vận tốc các phần tử có thể tính được bằng nhau.

## 2.2 Phương trình liên tục:

Theo nguyên lý bảo toàn khối lượng, khối lượng của một thể tích không thay đổi theo thời gian:  $\frac{dm}{dt} = 0$

Áp dụng phương trình vận chuyển với  $X$  là khối lượng chất:

$$X = \iiint_W x \rho dW = m = \iiint_W \rho dW \quad \text{với } x = 1$$

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{HT} = \left. \frac{\partial m}{\partial t} \right|_{CV} + \iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0$$

$$\text{hay:} \quad (3.11)$$

$$\iiint_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW + \iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0$$

(Đây là dạng tích phân của phương trình liên tục)

Bằng phép biến đổi Gauss biến tích phân thể tích sang tích phân bề mặt ta có:

$$\iiint_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW + \iiint_W \text{div}(\rho \vec{u}) dW = 0$$

$$\text{hay:} \quad (3.12)$$

$$\iiint_W \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) \right] dW = 0$$

Tích phân trên áp dụng cho thể tích  $W$  bất kỳ nên ta có dạng vi phân của phương trình liên tục là:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.13)$$

- Trường hợp lưu chất không nén ( $\rho = \text{const}$ ), chuyển động không nén phương trình liên tục có dạng:  $\text{div} \vec{u} = 0$  (3.14)

Trong hệ tọa độ vuông góc phương trình trên có dạng:

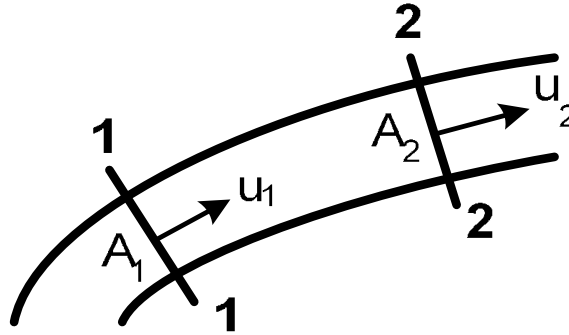
$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

Trong hệ tọa độ trụ phương trình (5) có dạng:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

- Tr ãng h p l u ch t chuy ãn ãng ãn ãnh, l chỉ u:

Xét th ãt tích ki m soát là m t o ãn ãng ch y c gi i h ãn b i 2 ãi ãn tích cùng vuõng gõc v i các ãng ãng ãng là  $S_1$  và  $S_2$ . Gi v ãn t c c a ch t l ãng t i hai m t ó l ãn l t là  $u_1$  và  $u_2$  và ãi ãn tích bao quanh ãng ãng ãng  $S_b$



Hình 3.7 ãng ch y trong ãng

Tr ãng h p l u ch t không ãn chuy ãn ãng ãng, ph ãng ãng (5) tr ãnh:

$$\iiint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = \iint_{A_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA + \iint_{A_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA + \iint_{S_B} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (3.16)$$

ãi ãn tích  $S_B$  t o b i các ãng ãng ãng ãn vecto ãn v phãp tuy ãn  $\vec{n}$  th ãng gõc v i vecto v ãn t c  $\vec{u}$  ãn ta có  $\iint \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0$ , suy ra:

$$\iint_{A_1} \rho \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 dA_1 + \iint_{A_2} \rho \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 dA_2 = 0 \quad (3.17)$$

V i hai m t c t t l - 1 và 2 - 2 là m t c t t, ph ãng c a vecto v ãn t c trùng v i ph ãng c a vecto ãn v phãp tuy ãn, ta có:  $\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = -u_1$  và  $\vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = u_2$ . Suy ra:

$$\begin{aligned} \iint_{A_1} \rho_1 u_1 dA_1 &= \iint_{A_2} \rho_2 u_2 dA_2 \\ \text{hay: } Q_{m1} &= Q_{m2} \\ \text{hay: } \rho_1 V_1 A_1 &= \rho_2 V_2 A_2 = \text{const} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Trong ó:

1,  $V_1$  là kh i l ãng riêng và v ãn t c trung bình c a m t c t t l - 1.

2,  $V_2$  là kh i l ãng riêng và v ãn t c trung bình c a m t c t t 2 - 2.

Ngoài ra, chúng ta xét s ãh y c a ch t l ãng trong kho ãng th i gian  $\Delta t$ . Do ch t l ãng là không ãn c ãn th ãt tích ãn c bên ngoài i vào trong ãng ãng qua ãi ãn tích  $S_1$  c ãng chính là th ãt tích ãn c bên trong ãng ãng i ra ngoài qua ãi ãn tích  $S_2$ .

T c là:



$$u_1 \Delta_t S_1 = u_2 \Delta_t S_2$$

Chia 2 v cho  $\Delta t$  ta c:  $u_1 S_1 = u_2 S_2$

Vì các di n tích  $S_1$  và  $S_2$  c ch n tùy ý trên ng dòng nên t ng quát, ta có:

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 = uS = \text{const}$$

N u ch t l u là ng ch t và có kh i l ng riêng là  $\rho$ , thì có th vi t:

$$\rho uS = \text{const} \quad (3.19)$$

Ph ng trình trên g i là ph ng trình liên t c c a ch t l ng nén c.

Phát bi u: Đ i v i m t ng dòng ã cho, tích c a v n t c ch y c a ch t l u lý t ng v i ti t di n th ng c a ng t i m i n i là m t i l ng không i.

**Ý ngh a:** Khi ch t l u ch y trên m t ng ng có ti t di n khác nhau thì v n t c nh ng n i có ti t di n nh s l n và nh ng n i có ti t di n l n s nh .

## V. PHÂN TÍCH CHUY N NG C A L U CH T

### 1. Các y u t chuy n ng:

Ch t l ng chuy n ng là m t môi tr ng liên t c do vô s ph n t ch t l ng chuy n ng t o nên, m i ph n t c c tr ng b i các i l ng c b n c a s chuy n ng, g i là y u t chuy n ng. Ví d nh v n t c u, áp su t th y ng p, kh i l ng riêng ... Do ch t l ng là m t môi tr ng liên t c nên các y u t chuy n ng u là hàm s liên t c c a t a không gian và th i gian.  $u = u(x, y, z, t)$ ,  $p = p(x, y, z, t)$ ,  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ ... Trong th y l c, ta th ng xét n u và p, còn coi nh không i vì ta coi ch t l ng nh không nén c.

Khi coi ch t l ng là lý t ng (không có tính nh t) áp su t th y ng h ng theo pháp tuy n c a m t tác đ ng, còn trong ch t l ng th c, áp su t th y ng c ng h ng vào m t ti p xúc nh ng xiên góc v i ph ng pháp tuy n, vì nó là t ng h p c a ng su t pháp tuy n và ng su t ti p tuy n do l c nh t gây ra.

T i m t v trí nh t nh trong lòng ch t l ng chuy n ng, m t th i i m nh t nh, v n t c c a m t ph n t ch t l ng o c g i là v n t c t c th i, kí hi u u. Riêng i v i dòng ch y r i, v n t c i m t c th i này luôn thay i v h ng và tr s nên ta th ng thay b ng giá tr trung bình trong m t th i gian T nh t nh g i là v n t c trung bình th i gian, kí hi u

$$\bar{u} = 1/T \int_0^T u(t) dt. \quad (3.20)$$

Tuy vậy, từ từ những phép biến đổi chuyển động, nói chung những biến đổi liên giá trị vận tốc ở mức trung bình thời gian, thay cho vận tốc tức thời, những vận động kích thích. Còn trong kết luận, những biến đổi dùng khái niệm vận tốc trung bình của toàn dòng chảy qua mặt cắt ngang, thì góc vận tốc tức thời dòng chảy, gọi là vận tốc trung bình mặt cắt của dòng chảy.

## 2 Phân tích chuyển động của phần tử lưu chất:

Tính chất biến của lưu chất là môi trường liên tục biến đổi, nghĩa là trong quá trình chuyển động các phần tử lưu chất luôn thay đổi vị trí và hình dạng.

Trong hình tam giác vuông góc, ta xét một phần tử phân tử lưu chất tại  $M(x, y, z)$  và điểm  $M_1(x + dx, y + dy, z + dz)$  nằm sát cạnh phần tử. Gọi  $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$  là vận tốc của phần tử lưu chất tại  $M$  và  $\vec{u}_1(u_{1x}, u_{1y}, u_{1z})$  là vận tốc của phần tử lưu chất tại  $M_1$  cùng thời điểm. Khi cách giữa  $M$  và  $M_1$  rất nhỏ nên ta có mối quan hệ sau:

$$u_{1x} = u_x(x + dx, y + dy, z + dz) = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}dz \quad (3.21)$$

$$u_{1y} = u_y(x + dx, y + dy, z + dz) = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x}dx + \frac{\partial u_y}{\partial y}dy + \frac{\partial u_y}{\partial z}dz \quad (3.22)$$

$$u_{1z} = u_z(x + dx, y + dy, z + dz) = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x}dx + \frac{\partial u_z}{\partial y}dy + \frac{\partial u_z}{\partial z}dz \quad (3.23)$$

Ta có thể biến đổi phương trình (3.21) bằng cách thêm vào và bớt đi các số hạng

$\frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x}$ , ta có:

$$u_{1x} = u_x + \frac{1}{2} \left[ dz \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) - dy \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{1}{2}dy \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}dz \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

$$u_{1y} = u_y + \frac{1}{2} \left[ dx \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) - dz \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial u_y}{\partial y}dy + \frac{1}{2}dz \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}dx \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

$$u_{1z} = u_z + \frac{1}{2} \left[ dy \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) - dx \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial u_z}{\partial z}dz + \frac{1}{2}dx \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}dy \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$

Gọi:

$$w_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$

$$w_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

$$w_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (3.24)$$

ây là 3 thành phần của vectơ vận tốc quay  $\vec{w} = \frac{1}{2} r \vec{\omega} \vec{u}$  (ta sẽ xét rõ ý nghĩa của vectơ vận tốc quay trong phần sau).

t:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (3.25)$$

ây là 3 thành phần của suất biến dạng góc. Và suất biến dạng dài là:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3.26)$$

Vecto biến dạng  $\vec{D}$  có 3 thành phần:

$$\begin{aligned}D_x &= \varepsilon_{xx} dx + \varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz \\ D_y &= \varepsilon_{yx} dx + \varepsilon_{yy} dy + \varepsilon_{yz} dz \\ D_z &= \varepsilon_{zx} dx + \varepsilon_{zy} dy + \varepsilon_{zz} dz\end{aligned}\quad (3.27)$$

Vecto vận tốc  $\vec{u}$  có vi phân dạng sau:

$$\begin{aligned}u_{1x} &= u_x + (w_y dz - w_z dy) + \varepsilon_{xx} dx + \varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz \\ u_{1y} &= u_y + (w_z dx - w_x dz) + \varepsilon_{yx} dx + \varepsilon_{yy} dy + \varepsilon_{yz} dz \\ u_{1z} &= u_z + (w_x dy - w_y dx) + \varepsilon_{zx} dx + \varepsilon_{zy} dy + \varepsilon_{zz} dz\end{aligned}\quad (3.28)$$

### 3 nh lí Hemholtz:

Vận tốc chuyển động của lưu chất trong trường vận tốc quát có thể xem là tổng hợp của các chuyển động: chuyển động tịnh tiến, chuyển động quay và chuyển động biến hình (gồm biến dạng dài và biến dạng góc).

Trong đó ta phân tích kết quả chuyển động quay, vận tốc quay:

$$\vec{w} = \frac{1}{2} r \vec{\omega} \vec{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
 w_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\
 \text{Suy ra: } w_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\
 w_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Khi  $\vec{rot\vec{u}} = 0$ : chuyển động c g i là chuyển động không quay hay chuyển động th hay  $w_x = w_y = w_z = 0$

Khi  $\vec{rot\vec{u}} \neq 0$ : chuyển động c g i là chuyển động quay.